Геометрия четырехугольника. Теорема Вариньона. Вписанные четырехугольники. Теорема Брахмагупты

ЭМ и ПРМЗ, лекция 6
к.п.н., доц. Пырков Вячеслав Евгеньевич

План

1. Четырехугольник и его свойства
2. Классификация четырехугольников
3. Теорема Вариньона
4. Вписанные четырехугольники и их свойства
5. Теорема Брахмагупты

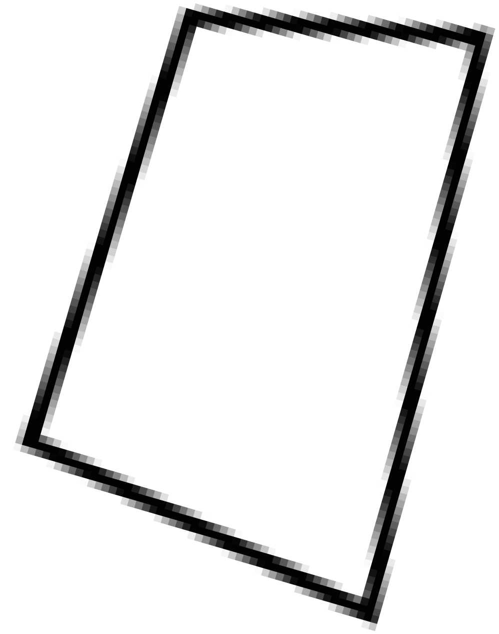
Литература для самостоятельной работы

- ✓ ***Коксетер Г., Грейтцер С.*** Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

1. Четырехугольник и его свойства

•Сумма углов четырёхугольника равна 2 π = 360°.

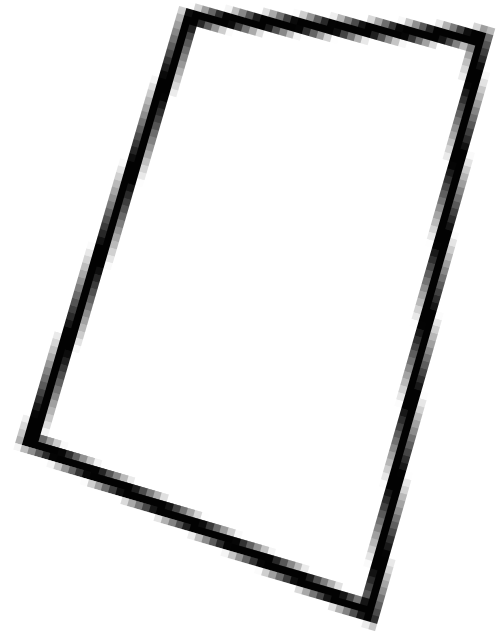
•**Формула Эйлера**: учетверённый квадрат расстояния между серединами диагоналей равен сумме квадратов сторон четырёхугольника минус сумма квадратов его диагоналей.



•Средние линии четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

•Средние линии четырёхугольника равны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

1. Четырехугольник и его свойства



•Четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину четырёхугольника с центроидом треугольника, образованного оставшимися тремя вершинами, пересекаются в центроиде четырёхугольника и делятся им в отношении 3:1, считая от вершин.

•Две противоположные стороны четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух других противоположных сторон равна сумме квадратов диагоналей.

•Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

1. Четырехугольник и его свойства

•Шесть расстояний между четырьмя произвольными точками плоскости, взятыми попарно, связаны соотношением:

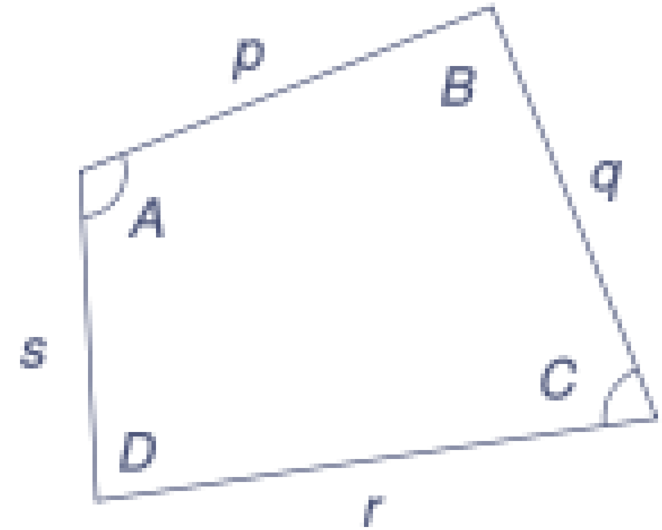
$$a^2c^2\left(b^2+d^2+e^2+f^2-a^2-c^2\right)+b^2d^2\left(a^2+c^2+e^2+f^2-b^2-d^2\right)+$$
$$+e^2f^2\left(a^2+c^2+b^2+d^2-e^2-f^2\right)=\left(abe\right)^2+\left(bcf\right)^2+\left(cde\right)^2+\left(daf\right)^2$$

Это соотношение можно представить в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & e^2 & d^2 & 1 \\ a^2 & 0 & b^2 & f^2 & 1 \\ e^2 & b^2 & 0 & c^2 & 1 \\ d^2 & f^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

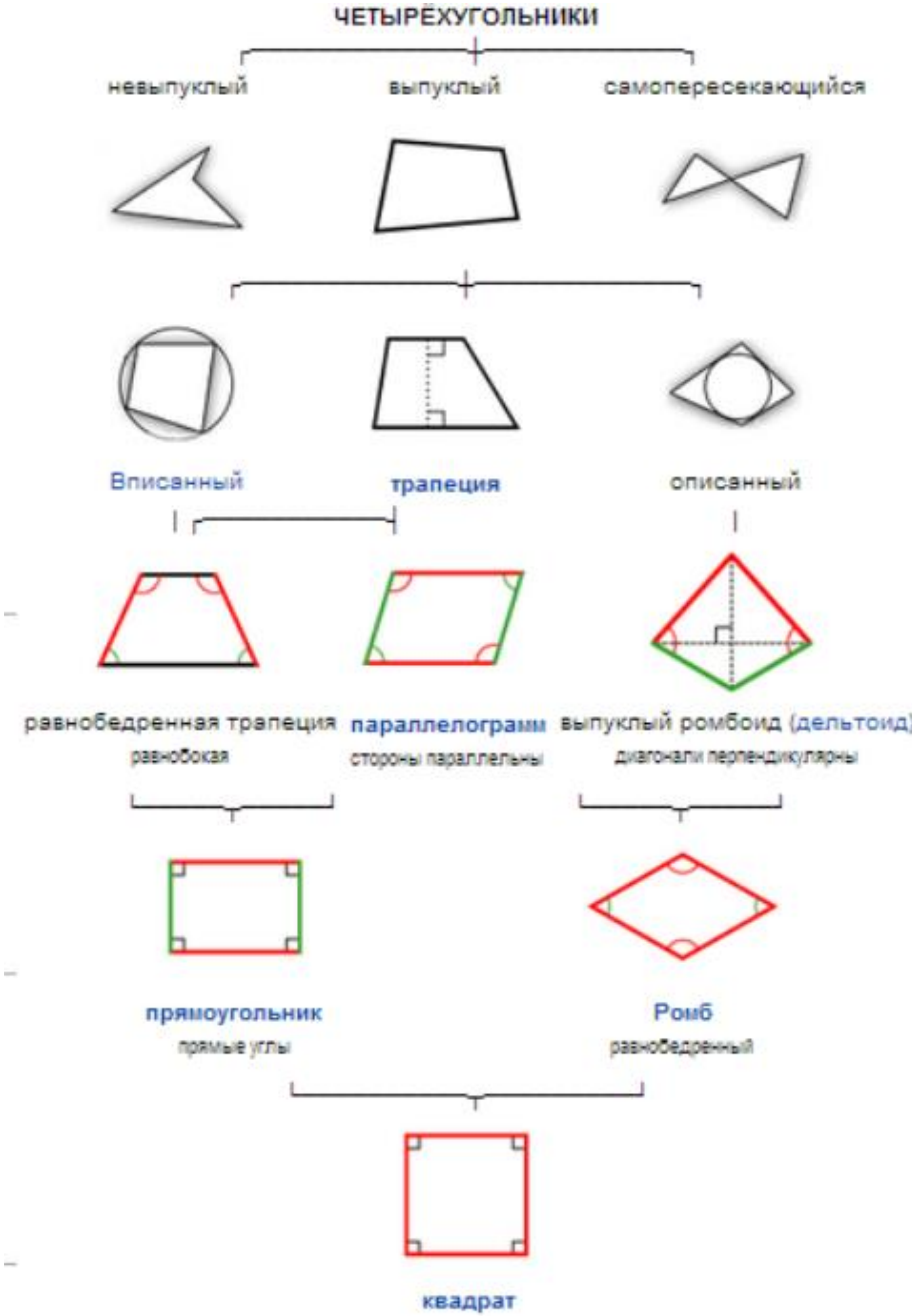
1. Четырехугольник и его свойства

Между сторонами *a*, *b*, *c*, *d* и противоположными углами $\angle A, \angle C$ и диагоналями *e*, *f* простого (несамопересекающегося) четырёхугольника выполняется соотношение:

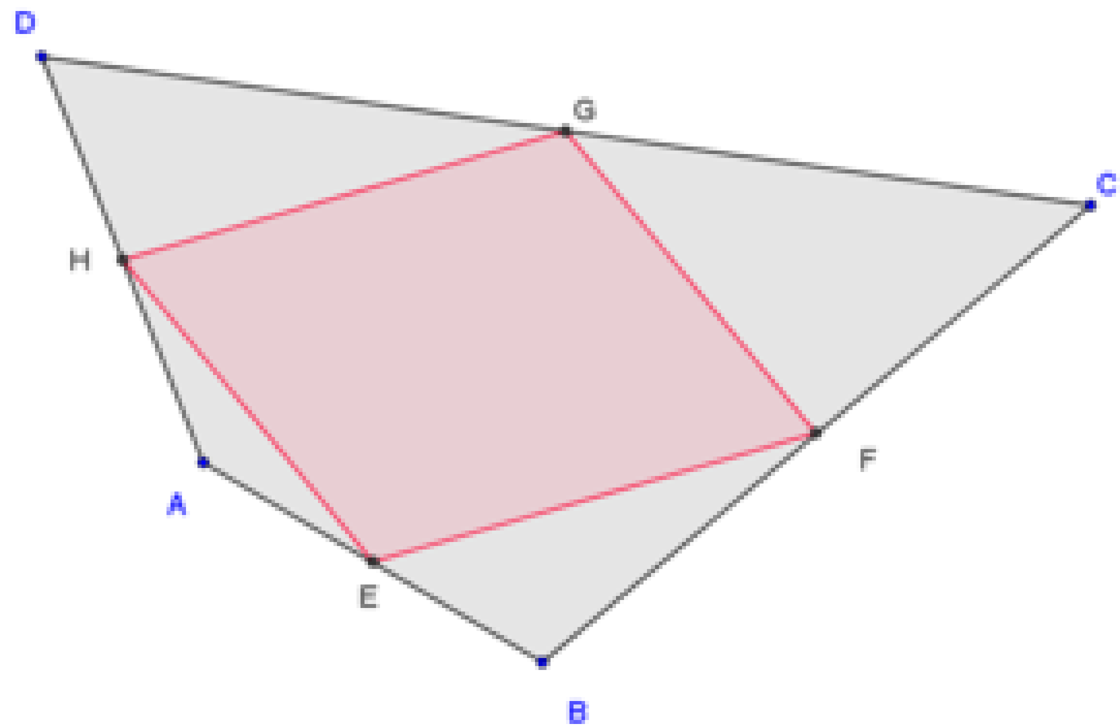


$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C)$$

2. Классификация четырехугольников

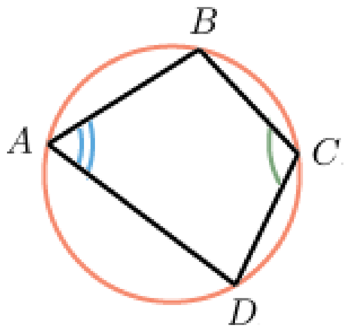


3. Теорема Вариньона



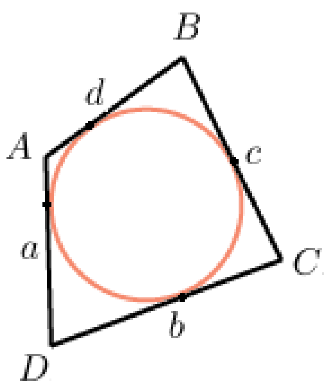
Теорема. *Середины сторон произвольного четырёхугольника — вершины параллелограмма.*

4. Вписанные четырехугольники



$\angle A + \angle C = 180°$

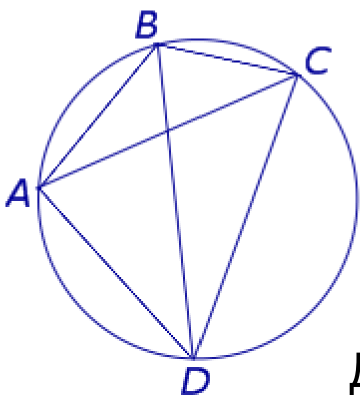
Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны $180°$.



$a + c = b + d$

Четырёхугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

4. Вписанные четырехугольники

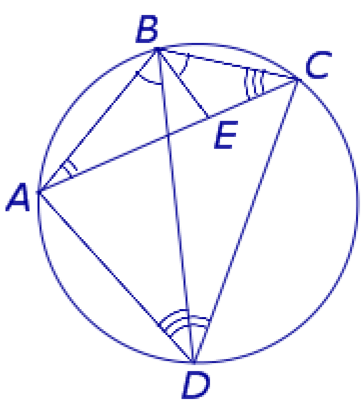


Теорема Птолемея. Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность.

Докажем, что справедливо равенство:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$



Для этого выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABD был равен углу CBE

Заметим, что треугольник ABD подобен треугольнику BCE.

Следовательно, справедлива пропорция: $\frac{BC}{EC} = \frac{BD}{AD}$,

откуда $BC \cdot AD = EC \cdot BD$.

Заметим, что треугольник ABE подобен треугольнику BCD.

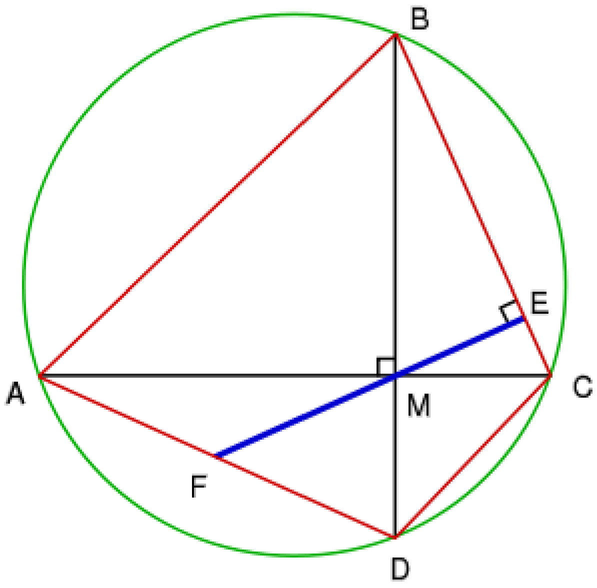
Следовательно, справедлива пропорция: $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$,

откуда $AB \cdot CD = AE \cdot BD$.

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + EC \cdot BD = \left(AE + EC\right) \cdot BD = AC \cdot BD.$$

5. Теорема Брахмагупты

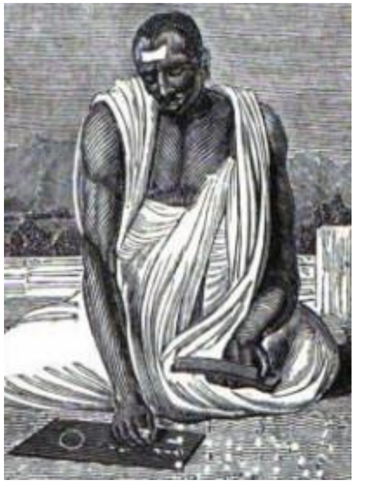


$$\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{EF} \perp \overline{BC}$$
$$\Rightarrow |\overline{AF}| = |\overline{FD}|$$

Теорема. Если вписанный четырёхугольник имеет перпендикулярные диагонали, пересекающиеся в точке M, то прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная одной из его сторон, делит противоположную ей сторону пополам.

$$\angle DMF = \angle BME = \angle MCE \equiv \angle ACB = \angle ADB \equiv \angle FDM.$$
$$|FA| = |FM| = |FD|$$

5. Формула Брахмагупты



Если a, b, c, d – длины сторон четырёхугольника,
$p = \frac{a+b+c+d}{2}$ – его полупериметр,
а α – сумма его противоположных углов,
то площадь четырёхугольника равна

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

В качестве α здесь можно взять сумму любой из двух пар противоположных углов, результат от этого не зависит. В случае четырёхугольника, вписанного в окружность, эта формула принимает более простой вид:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

это равенство и называется **формулой Брахмагупты**. Если четырёхугольник имеет и описанную и вписанную окружности, то формула становится совсем короткой: $S = \sqrt{abcd}$

5. Формула Брахмагупты

Теорема. Площадь описуемого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и полупериметром p можно вычислить по формуле Брахмагупты:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

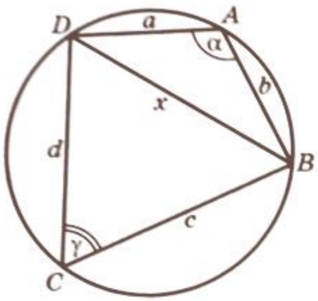


Рис. 400

Доказательство 1 (рис. 400).

$\alpha + \gamma = 180°$. Значит, $\gamma = 180° - \alpha$ и поэтому $\cos\gamma = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Воспользуемся два раза теоремой косинусов:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha.$$

Приравняем найденные значения для x^2:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (2ab + 2cd)\cos\alpha. \quad (1)$$

Найдем площадь S нашего четырехугольника:

$$S = S_{ABD} + S_{CBD},$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}(ab + cd)\ \sin\alpha,$$
$$4S = (2ab + 2cd)\sin\alpha. \quad (2)$$

Возведем обе части равенств (1) и (2) в квадрат и сложим их:

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16 \cdot S^2 = (2ab + 2cd)^2,$$
$$16 \cdot S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$$
$$16 \cdot S^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2),$$
$$16 \cdot S^2 = [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2],$$
$$16 \cdot S^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b),$$
$$a + b + c - d = (a + b + c + d) - 2d = 2p - 2d = 2(p - d).$$

Аналогичным образом получим: $a + b - c + d = 2(p - c)$,

$$c + d + a - b = 2(p - b),\ c + d - a + b = 2(p - a).$$

Значит, $16 \cdot S^2 = 2(p - d) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a)$,

$$S^2 = (p - a)(p - d)(p - c)(p - b).$$

■